

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：抽樣方法

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、假設  $F = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  是一個僅僅包含四個元素的小規模有限母體 (finite population)，而我們採用簡單隨機抽樣 (simple random sampling) 從母體  $F$  之中抽出樣本大小 (sample size) 為  $n=2$  的樣本組合，那麼總共會有多少種不同的樣本組合？如果我們改用機率均等的隨機置回抽樣 (sampling with replacement)，那麼總共會有多少種不同的樣本組合？如果母體  $F$  之中四個元素的研究變數 (study variable) 值分別為  $y_1=1$ 、 $y_2=3$ 、 $y_3=3$ 、以及  $y_4=9$ ，那麼母體  $F$  的母體平均數 (population mean) 是多少？母體變異數 (population variance) 是多少？(5分)

二、假設第一題之中從母體  $F$  抽出簡單隨機樣本的樣本數據為  $Y_1$  與  $Y_2$  (註：採用大寫英文字母  $Y$ ，表示樣本數據皆為隨機變數)。我們分別使用下列三種不同的點估計量 (point estimator) 來估計母體變異數  $\sigma^2$ ：

$$\widehat{\sigma}_{(1)}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \widehat{\sigma}_{(2)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \widehat{\sigma}_{(3)}^2 = \frac{N-1}{N(n-1)} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

其中  $\bar{Y}$  為樣本平均數 (sample mean)、 $N$  為母體大小 (population size)。

(一)試計算以上三種估計量的抽樣分布 (sampling distribution) 與均方誤差 (mean square error)，並判別它們是否為不偏估計量 (unbiased estimator)。(20分)

(二)假設我們改用機率均等的隨機置回抽樣，請重新判別三種估計量是否為不偏估計量。簡答即可，無需計算或證明。(3分)

三、假設某一間大學共有 8000 位學生，其中 2000 人為男生，6000 人為女生。同時，8000 位學生之中有 7000 人屬於日間部，1000 人屬於夜間部。

(一)我們打算採用分層隨機抽樣 (stratified random sampling) 之方法從 8000 位學生之中抽出  $n=16$  位學生，來估計 8000 位學生的平均身高。那麼應當依照男女性別來分層，抑或依照日間、夜間部別來分層較為恰當？如果依據比例配置 (proportional allocation) 來進行抽樣，須要分別從各層抽出多少人？抽出樣本並取得樣本觀測值之後，應如何估計 8000 位學生的平均身高？另外，如果我們想要採用分層隨機抽樣來調查 8000 位學生的月平均收入 (例如校外打工或兼差之收入)，那麼應當依照男女性別來分層，抑或依照日間、夜間部別來分層較為恰當？(8分)

(二)先前採用分層隨機抽樣來估計 8000 位學生之平均身高的問題，如果依據尼門配置 (Neyman allocation) 來進行抽樣，須要分別從各層抽出多少人？假設母體之中男生層之身高的變異數為女生層之身高變異數的 1.96 倍，日間部與夜間部學生身高的變異數比例數為 1.1。(8分)

(三)先前估計 8000 位學生之平均身高的問題，如果我們改用事後分層 (post-stratification) 之方法來抽樣與推估，那麼整個調查過程應該如何進行？從樣本配置的觀點來看，事後分層可以被視為何種類型之配置？由於  $n=16$  屬中小樣本，萬一發生空事後層 (empty post-stratum) 之情形，應當如何處理或補救？(12分)

(請接背面)

等 別：三等考試  
類 科：統計  
科 目：抽樣方法

- 四、何謂雙重抽樣 (double sampling)？試就分層隨機抽樣以及比值估計兩種情況分別說明之，並寫出點估計量的數學式。(22分)
- 五、集群抽樣 (cluster sampling) 以及二階段集群抽樣 (two-stage cluster sampling) 與比值估計有何關聯性？試就估計母體平均數之情況予以分別說明並寫出點估計量的數學式。(22分)